

## Übungsaufgaben zu Mathematik, Logik und Systemtheorie

### I. Matrizenrechnung

1. Gegeben sei ein Haushalt mit einer Anfangsausstattung von Gütern  $\vec{w} = (300, 500)$ , deren Preise durch den Preisvektor  $\vec{p} = (2, 3)$  festgelegt sind. Unter der Annahme, dass jeder Konsumplan  $\vec{x}$  das Gesamtvermögen des Haushalts gerade erschöpft, berechne man alle möglichen Vektoren der Überschussnachfrage  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{w}$  sowie die jeweilige Nachfrage  $\vec{x}$ .
2. Für die Vektoren  $\vec{x} = (3, -1, 2)$  und  $\vec{y} = (2, -3, -1)$  (in einem kartesischen Koordinatensystem) berechne man
  - (a) die Länge von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  (Länge eines Vektors:  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ ),
  - (b) den Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  nach der Formel  $\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$ .
3. Gegeben sei im Anschauungsraum ein fester Vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Man zerlege einen beliebigen Vektor  $\vec{x}$  in eine Summe  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ , sodass  $\vec{y}$  parallel zu  $\vec{a}$  und  $\vec{z}$  senkrecht zu  $\vec{a}$  ist.
4. Zu den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

bilde man alle Produkte  $A_i A_j$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ), welche definiert sind.

5. Sei  $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ . Man zeige, dass dann  $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$ ,  $A$  invertierbar und  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$  gilt.
6. Man zeige, dass die Determinante  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$  dem Flächeninhalt jenes Parallelogramms entspricht, welches von den beiden Vektoren  $(1, 2)$  und  $(-3, 1)$  aufgespannt wird. Man finde eine entsprechende Interpretation für die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix an.

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man weise mit Hilfe eines Computeralgebrasystems nach, dass  $A$  nichtsingulär ist (dafür ist  $|A| \neq 0$  zu überprüfen) und berechne  $A^{-1}$ . Schließlich ermittle man  $AA^{-1}$  sowie  $A^{-1}A$ .

8. Man berechne die folgende Determinante zuerst mit der Hand und überprüfe anschließend mit dem Computer:

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 & 10 \\ -4 & 8 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

9. Man zeige, dass jede quadratische Matrix  $A$  als Summe einer symmetrischen Matrix  $B$  (mit  $B = B^T$ ) und einer schiefsymmetrischen Matrix  $C$  (mit  $C = -C^T$ ) geschrieben werden kann. (Hinweis: Man wähle  $B = (1/2)(A + A^T)$ .) Man führe diese Zerlegung konkret für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

durch.

10. Ein Produzent verarbeite die Rohstoffe  $R_1, R_2, R_3$ . Der Verbrauch der Rohstoffe während vier Wochen eines Monats sei wie folgt gegeben:

Woche / Rohstoff	$R_1$	$R_2$	$R_3$
1. Woche	8	4	12
2. Woche	10	6	5
3. Woche	7	8	5
4. Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen bei einem von zwei Lieferanten  $L_1, L_2$  bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in nachstehender Tabelle angegeben sind:

Rohstoff / Lieferant	$L_1$	$L_2$
$R_1$	8	4
$R_2$	10	6
$R_3$	7	8

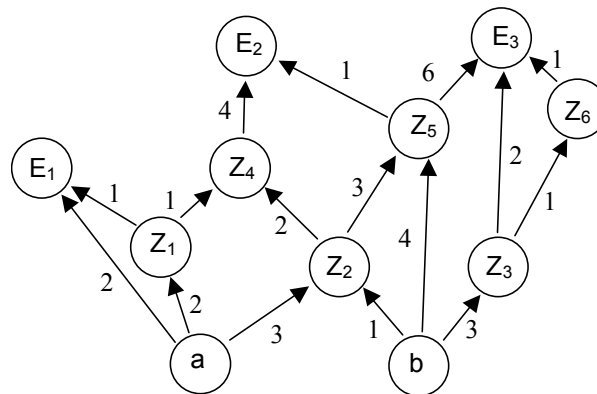
Man vergleiche die Rohstoffkosten für alle vier Wochen. Soll der Produzent beim Lieferanten  $L_1$  oder  $L_2$  bestellen?

11. Ein Produktionsprozess, in den die Produkte  $R_1, R_2, Z_1, Z_2, E$  eingebunden sind, werde durch die folgende Gozintomatrix  $D$  beschrieben:

$$D = \begin{matrix} & E & Z_1 & Z_2 & R_1 & R_2 \\ \begin{matrix} E \\ Z_1 \\ Z_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Man zeichne den zugehörigen Gozintographen an. Ferner bestimme man die Matrix  $D^2$  und interpretiere deren Elemente rechnerisch und graphisch.

12. Dem nachstehend abgebildeten Gozintographen entnehme man die Gozintomatrix  $D$  und berechne daraus mit Hilfe eines Computeralgebrasystems die Gesamtbedarfsmatrix  $G$ . Welche Mengen der Rohstoffe  $a$  und  $b$  benötigt man insgesamt für die Herstellung von 15 Einheiten  $E_1$ , 20 Einheiten  $E_2$  und 25 Einheiten  $E_3$  ?



13. Ein Produktionsschema zur Fertigung von Endprodukten  $E_1, E_2, E_3$  aus den Rohstoffen  $a, b$  sei durch die folgende Gozintomatrix  $D$  gegeben:

$$D = \begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & a & b \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Man bestimme die Zahl jener Zwischenschritte, die ein Rohstoff maximal durchläuft, ehe er indirekt für ein Endprodukt verwendet wird, und berechne den Rohstoffbedarf für 10 Einheiten  $E_1$ , 12 Einheiten  $E_2$  und 7 Einheiten  $E_3$ .

14. Man wähle eine beliebige  $5 \times 5$ -Matrix  $M$  und untersuche unter Verwendung eines Computeralgebrasystems, wie sich die Determinante  $|M|$  bei (i) Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten, (ii) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem konstanten Faktor, (iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte verhält. Schließlich entwickle man die Determinante nach einer beliebigen (iv) Zeile bzw. (v) Spalte und vergleiche jeweils die Ergebnisse.
15. Man untersuche die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme und berechne gegebenenfalls alle ihre Lösungen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 = 12 \\ \text{(c)} & -3x_1 + x_2 = 1 \\ & 9x_1 - 3x_2 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & x_1 + 5x_2 = 0 \\ & 2x_1 - x_2 = 0 \\ \text{(d)} & 12x_1 + 9x_2 = 18 \\ & 8x_1 + 6x_2 = 12 \end{array}$$

16. Für zwei Waren seien die jeweilige Nachfrage

$$N_1 = a + b p_1 + c p_2, \quad N_2 = e + f p_1 + g p_2$$

und das jeweilige Angebot

$$A_1 = h + k p_1, \quad A_2 = m + n p_2$$

als Funktionen ihrer Preise  $p_1$  und  $p_2$  gegeben ( $a, b, \dots, n$  konst.). Man gebe die Modellgleichungen für den Fall, dass für beide Waren ein Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage erreicht ist, in vektorieller Form wieder. Ferner berechne man die Preise  $p_1$  und  $p_2$  im Gleichgewichtsfall (unter der Annahme der eindeutigen Lösbarkeit des Systems) sowie die Mengen, die dann auf dem Markt umgesetzt werden.

17. Das einfache Keynesche Modell für das Volkseinkommen wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = a_1 + a_2 Y.$$

Dabei bezeichnet  $Y$  das Volkseinkommen,  $C$  den Konsum,  $I_0$  die autonomen Investitionen,  $G_0$  die autonomen Staatsausgaben und  $a_1, a_2$  sind Konstante. Man bestimme die Lösung dieses Systems durch eine geeignete Fallunterscheidung für  $a_2$ .

18. Es soll untersucht werden, in welcher Weise sich der Preis eines Endprodukts auf die verschiedenen Produktionsfaktoren aufteilt: Drei Waren A, B, C werden unter Verwendung der Produktionsfaktoren Boden, Arbeit und Kapital hergestellt. Wie viele Einheiten dieser Faktoren in die Produktion je einer Einheit der Endprodukte eingehen, wird durch die Produktionskoeffizienten in nachstehender Tabelle angegeben. Die Preise der drei Waren seien  $p_A = 51$ ,  $p_B = 53$ ,  $p_C = 36$ . Man bestimme die Preise je einer Einheit der drei Faktoren, d.h. Bodenrente, Lohnsatz und Zinssatz bei der Produktion dieser Waren.

		Endprodukt		
		A	B	C
Faktor	Boden	1	2	3
	Arbeit	2	3	1
	Kapital	5	1	2

19. Man löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rccccrcr} -3x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 7 \\ & x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -7 \\ & x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & & -3x_4 & = & -2 \end{array}$$

20. Bei der Produktion von vier Gütern  $G_1, G_2, G_3, G_4$  treten als Engpässe die Belegung einer Maschine, die zur Verfügung stehende Arbeitszeit und ein Rohstoff auf, der nur in begrenzter Menge beschafft werden kann. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über den Bedarf an Maschinenzeit, Arbeitsstunden und Rohstoffeinheiten für die Produktion eines Stücks eines jeden der vier Güter.

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
Maschinenzeit	2	1	0,5	2
Arbeitszeit	3	2	1	2,5
Rohstoffbedarf	2	0	5	10

Im betrachteten Zeitraum kann die Maschine höchstens 10.000 h laufen, höchstens 15.000 Arbeitsstunden können aufgewendet werden, und maximal 24.000 Einheiten des Rohstoffes können herbeigeschafft werden. Gibt es Produktionszahlen für die vier Güter, bei denen sowohl die zur Verfügung stehenden Maschinen- und Arbeitsstunden als auch die genannten Rohstoffmengen voll ausgeschöpft werden? Gegebenenfalls ist (zumindest) eine solche Lösung anzugeben.

21. Wir betrachten folgendes volkswirtschaftliche Gesamtmodell, das für die BRD (1950-1959) erstellt wurde. Es bezeichnen  $C_t$  den privaten Konsum,  $I_t$  die Investitionen,  $M_t$  die Importe,  $Y_t^B$  das Bruttonationalprodukt,  $D_t$  die Abschreibungen,  $K_t$  den Kapitalstock,  $Y_t$  das Nettonationalprodukt,  $U_t$  den Zinssatz und  $L_t$  die Beschäftigung im Jahr  $t$ . Dann lauten die Modellgleichungen:

$$C_t - 0,317Y_t = 4,278 + 0,507C_{t-1} \quad (\text{Konsumfunktion})$$

$$I_t - 0,224Y_t = -10,78 - 0,625U_t \quad (\text{Investitionsfunktion})$$

$$M_t - 0,078Y_t^B = -5,873 + 0,902M_{t-1} \quad (\text{Importfunktion})$$

$$Y_t^B - 0,0195K_t = -299,691 + 0,0195K_{t-1} + 19,741L_t \quad (\text{Produktionsfunktion})$$

$$D_t - 0,0173K_t = -5,526 + 0,0173K_{t-1} \quad (\text{Abschreibungsfunktion})$$

$$K_t - I_t = K_{t-1} \quad (\text{Kapitalstock})$$

$$Y_t - Y_t^B + D_t = 0 \quad (\text{Nettonationalprodukt})$$

Gegeben seien nun die Werte  $C_{t-1} = 128,6$ ,  $M_{t-1} = 54,582$ ,  $K_{t-1} = 702,74$ ,  $U_t = 3,03$  und  $L_t = 24,555$ . Man erstelle ein Gleichungssystem für die Variablen  $C_t$ ,  $I_t$ ,  $M_t$ ,  $Y_t^B$ ,  $D_t$ ,  $K_t$  und  $Y_t$  in vektorieller Form. Das System ist unter Zuhilfenahme eines Computeralgebrasystems zu lösen.

22. Gilt für eine quadratische Matrix  $A$  die Gleichung  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , so nennt man den Vektor  $\vec{x}$  einen Eigenvektor und den Skalar  $\lambda$  einen Eigenwert der Matrix  $A$ . Man berechne alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

aus der sogenannten charakteristischen Gleichung  $|A - \lambda E_2| = 0$  und alle zugehörigen Eigenvektoren durch Lösung des linearen Gleichungssystems  $(A - \lambda E_2)\vec{x} = \vec{0}$  (wo  $E_2$  die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix ist).

23. Man berechne einen Eigenwert und Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Hand und alle weiteren Eigenwerte und -vektoren mit dem Computer.

24. Aus der nachstehenden Input-Output-Tabelle ermittle man die Matrix der Inputkoeffizienten. Gibt es Outputs zu dieser Matrix, die anstelle der in der Tabelle angegebenen Nachfrage die neue Endnachfrage  $\vec{d} = (5,5,10,25)$  befriedigen?

von/nach	1	2	3	4	Endnachfrage
1	12,5	5	6	0	1,5
2	0	0	12	37,5	0,5
3	7,5	5	0	15	2,5
4	0	20	9	22,5	23,5

25. Man betrachte ein Input-Output-Modell mit drei Sektoren und der Matrix der Inputkoeffizienten

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Welche Veränderung ergibt sich für die Outputs dieses Systems, wenn die Endnachfrage nach Gütern des ersten Sektors um 2 Einheiten zunimmt, für die anderen beiden Sektoren jedoch unverändert bleibt?

26. Für ein aus vier Sektoren bestehendes Input-Output-Modell sei die Matrix der Inputkoeffizienten gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Der Outputvektor  $\vec{x}_1 > \vec{0}$  sei Lösung der Gleichung  $(E - A)\vec{x} = \vec{d}$  für eine gewisse Endnachfrage  $\vec{d}$ . Kann dieselbe Endnachfrage auch durch einen anderen Outputvektor  $\vec{x}_2$  befriedigt werden?

27. Man vergleiche die Verflechtungen der Sektoren zweier Volkswirtschaften mit den Input-Output-Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 31 & 50 \\ 25 & 0 & 0 \\ 44 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 40 \\ 5 & 0 & 15 \\ 20 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

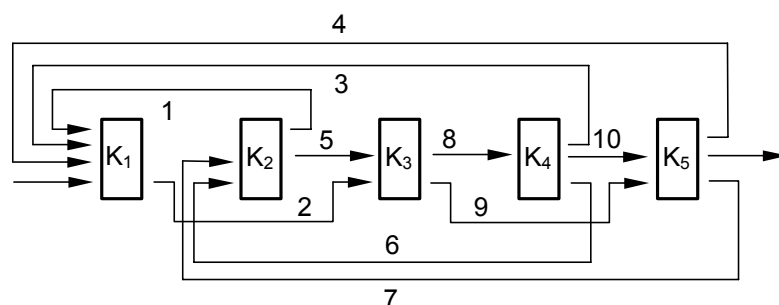
durch Berechnung ihrer Linearitätsgrade  $\lambda(X)$  und  $\lambda(Y)$ .

28. Man konstruiere eine Input-Output-Matrix für ein 3-Sektoren-Modell, deren Linearitätsgrad  $\lambda = 0\%$ ,  $50\%$ ,  $75\%$  bzw.  $100\%$  beträgt.
29. Die nachstehende Matrix  $P = (p_{XY})$  beschreibe die individuellen Präferenzen von zehn Studierenden hinsichtlich der Praxisrelevanz von vier Lehrveranstaltungen A,B,C,D:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Dabei gibt  $p_{XY}$  jeweils die Anzahl jener Personen an, welche die Lehrveranstaltung X der Veranstaltung Y vorziehen. Man bestimme eine kollektive Rangordnung der Lehrveranstaltungen durch Triangulierung der Matrix P.

30. In der folgenden Abbildung ist das Fluss-Schema einer Produktionsanlage dargestellt. Darin treten sogenannte Hinführströme (mit den Nummern 2,5,8,9,10) auf, welche in einer ausgezeichneten Richtung verlaufen, und Rückführströme (mit den Nummern 1,3,4,6,7), welche entgegen dieser Richtung verlaufen.



Für gewisse theoretische Untersuchungen ist es nun wünschenswert, von einer Darstellung der Anlage mit möglichst wenig Rückführströmen auszugehen. Man permutiere  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  derart, dass die Anzahl der Rückführströme so gering wie möglich ist und stelle das Fluss-Schema der Anlage für diesen Fall dar.