

II. Mehrdimensionale Analysis

31. Ein Unternehmen, das mit drei Produktionsfaktoren v_1, v_2, v_3 produziert, sieht sich den Faktorpreisen

$$w_1(v_1, v_2, v_3) = c_1 - \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2 v_3}}$$

$$w_2(v_1, v_2) = \begin{cases} c_2 - \frac{1}{v_2} \ln \frac{e^{v_1}}{v_1 v_2} & \text{falls } v_2 \leq \frac{e^{v_1}}{v_1} \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$w_3(v_3) = 2$$

für $v_1, v_2, v_3 \leq 1$ gegenüber. Man gebe die Gesamtkosten $c(\vec{v})$ in Abhängigkeit vom Faktorenbedarf $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ an, wenn die Fixkosten mit c_0 bezeichnet werden.

32. Man stelle den Definitionsbereich und Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

(a) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ (b) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ (c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

33. Gegeben sei die Polynomfunktion $z = f(x, y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebra-systems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.
34. Aus der Gleichung $a(bx^d + cy^d)^{1/d} = k$ (mit $a, b, c, d, k, x, y > 0$) drücke man x durch y aus.
35. Man zeige, dass die Nachfragefunktionen dreier Güter A, B, C

$$x_A = \frac{2p_C - p_A}{p_C}$$

$$x_B = \frac{5p_C - p_A - 2p_B}{p_C}$$

$$x_C = \frac{10p_A - p_B}{p_C}$$

homogen in den Preisen p_A, p_B, p_C sind. Man berechne weiters deren numerische Werte für $p_A = 2, p_B = 1, p_C = 10$, erhöhe (bzw. verringere) anschließend alle Preise um 20% und vergleiche die Funktionswerte.

36. Man prüfe nach, ob die Funktionen

(a) $f(x, y, z) = x + (yz)^{1/2}$ (für $y, z \geq 0$), (b) $f(x, y) = x^2 + y$ bzw.

(c) $f(x, y) = ax^b y^c$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}, x, y > 0$)

homogen sind.

37. Man bestimme den Homogenitätsgrad der CES-Produktionsfunktion $Y = c(aA^\gamma + bK^\gamma)^{1/\gamma}$ (A Arbeit, K Kapital, a, b, c, γ konstant).

38. Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.
39. Sei $f(x,y) = (\sin x)/(\cos y)$. Auf welcher Teilmenge von \mathbb{R}^2 sind f , f_{xy} bzw. f_{yx} definiert, und in welchem Bereich gilt $f_{xy} = f_{yx}$?

40. Man berechne die Grenzproduktivität sowie die partielle Elastizität der Produktionsfunktion

$$f(x,y,z) = 100x + 200y + 50z - x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 5xy + 3xz - yz$$

bezüglich x sowie deren numerische Werte für $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

41. Für die Kostenfunktion $K(v_1, v_2) = v_1 + \ln v_1 + v_2$ berechne man die Kosten- sowie die Stückkostenelastizität bezüglich des Faktors v_1 .
42. Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$x = f(v_1, v_2) = v_1^{1,1} + \frac{v_1^{2,5}}{v_2^{1,4}} + \frac{v_2^{2,6}}{v_1^{1,5}}.$$

Man zeige, dass $f(v_1, v_2)$ homogen ist und dass die variablen Kosten größer als der Output sind, falls die Faktorpreise mit den Grenzproduktivitäten übereinstimmen.

43. Durch die Gleichung

$$\ln Q = 0,171 + 0,481 \ln R - 0,133 \ln p - 0,00067 \ln t + 0,1 \ln S$$

(mit der Menge Q , dem Prokopfeinkommen R , dem Preis p , der Zeit t und den Exporten S) sei eine Nachfragefunktion für Textilien festgelegt. Man berechne die partiellen Elastizitäten der Menge nach dem Preis und nach dem Einkommen.

44. Man bestimme jene Produktionsfunktionen $Y = f(A,K)$, deren partielle Elastizitäten bezüglich der Arbeit A und des Kapitals K konstant gleich η_A bzw. η_K sind.
45. Man berechne den Gradienten der Funktion $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < 1$. Ferner ermittle man eine 3D-Darstellung von f und interpretiere an Hand dieser Darstellung den Gradienten.

46. Man berechne das Differential der Funktion $z = a \sin^2 x + b \sin x \cos y + c \cos^2 y$.

47. Man zeige, dass das Differential $dz = (2x + e^y)dx + (x + 1)e^y dy$ eine Stammfunktion besitzt, und berechne alle zugehörigen Stammfunktionen.

48. Man berechne die beiden Bereichsintegrale

$$(a) \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} (x + \sin y) dx dy \quad (b) \iint_{[0,1] \times [0,1]} (xe^y + ye^x) dx dy.$$

49. Für jeden festen Wert eines Parameters a sei ein Gleichgewicht $(x(a), p(a))$ auf einem Elementarmarkt durch die Modellgleichungen $f(x(a), a) = p(a)$ und $g(x(a)) = p(a)$ gegeben (mit der Nachfragefunktion f , der Angebotsfunktion g , der Menge x und dem Preis p), und es gelte $f_x < 0$, $f_a > 0$ und $g_x > 0$. Man bestimme das Vorzeichen einer Mengenänderung dx/da und einer Preisänderung dp/da .

50. Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y),h(x,y))$ nach y an der Stelle $(0,0)$, wobei $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x + y + 1$ ist.
51. Man berechne die Grenzrate der Substitution von x durch y unter der Annahme, dass zwischen dem Output z und den beiden Inputfaktoren x,y der Zusammenhang
- $$z^3 - x^2 - y^2 + z^2 - x - y - 1 = 0$$
- besteht.
52. Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion
- $$f(x, y) = x^2(y - 1) + xe^{y^2}$$
- im Entwicklungspunkt $(1,0)$.
53. Man zeige, dass die Funktion
- (a) $f(x,y) = x^4 + 3y^4 + 2x^2 + 4y^2$ (b) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2$
- streng konvex ist.
54. Man zeige, dass die Funktion $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ streng konkav ist.
55. Man berechne die lineare Approximation der Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^2$ im Punkt $(1, \dots, 1)$.
56. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = (x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7) e^x$.
57. Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems berechne man alle relativen Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$ und veranschauliche die Ergebnisse an Hand einer 3D-Darstellung.
58. Die Produktionskosten eines Monopolisten für die Herstellung zweier Güter A und B mögen $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ betragen. Man maximiere den Gewinn des Monopolisten und berechne die Produktpreise im Gewinnmaximum, falls die Nachfragefunktionen durch $p_1(x_1) = 28 - 3x_1$ und $p_2(x_2) = 22 - 2x_2$ gegeben sind.
59. Ein Unternehmen stelle zwei Güter her, deren Nachfrage durch die Gleichungen $x_1 = 20 - 4p_1 + 2p_2$ bzw. $x_2 = 10 + p_1 - p_2$ beschrieben werde. Die damit verbundenen Produktionskosten seien gegeben durch die Kostenfunktion $K(x_1, x_2) = 1,5x_1^2 + 0,5x_1x_2 + 2x_2^2$. Für welche Absatzmengen x_1 und x_2 ist der Gewinn maximal?
60. Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3 - x - y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.
61. Man bestimme die absoluten Extrema der Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 2x(y + 1) + 3y - 1$ für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$, und überprüfe die Ergebnisse in einer 3D-Graphik.
62. Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren berechne man die Extrema der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

63. Die Herstellung eines Produkts P unter Verwendung der Produktionsfaktoren A und B werde durch die Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

beschrieben. Der Gewinn des Produzenten sei durch $G(x_1, x_2, y) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$ gegeben. Man maximiere den Gewinn für die Preise $p_0 = 2$, $p_1 = 1$ und $p_2 = 8$, und ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen x_1 , x_2 , die Produktmenge y und den Unternehmergeinn G .

64. Gegeben seien die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ und die Kostenfunktion $K(x_1, x_2) = 12x_1 + 6x_2 + 10$ eines Unternehmens, das ein Gut unter Einsatz zweier Produktionsfaktoren herstellt. Man bestimme die minimalen Kosten bei einem angestrebten Output von $y = 400$ Mengeneinheiten.
65. Gegeben sei eine Nutzenfunktion $u(x, y)$ für zwei Güter sowie deren Preise p und q . Man zeige: Nimmt die Funktion u unter der Budgetbeschränkung $px + qy = a$ ($a > 0$, konstant) ein relatives Maximum an, dann verhalten sich die Grenznutzen u_x bzw. u_y proportional zu den Preisen p bzw. q .