

III. Dynamische Systeme

66. Man löse die Differenzgleichung $K_{n+1} = K_n + K_n p - R$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) für die Restschuld K_n nach n Jahren, welche sich bei der Tilgung einer Anfangsschuld K_0 durch jährliche konstante Rückzahlungen in der Höhe R bei einem jährlichen Zinssatz $p > 0$ ergibt.

67. Bezeichnet Y_t das Volkseinkommen, S_t die Sparsumme und I_t die Nettoinvestitionen während der Periode t , dann gelten nach dem Wachstumsmodell von Harrod die beiden Annahmen

$$(1) S_t = sY_t \text{ für } t = 0, 1, 2, \dots \text{ und}$$

$$(2) I_t = g(Y_t - Y_{t-1}) \text{ für } t = 1, 2, \dots$$

Dabei ist $s > 0$ die Sparquote und $g > 0$ ein Akzelerator (mit $s < g$). Aus der Gleichgewichtsbedingung $S_t = I_t$ für $t \geq 1$ leite man eine Differenzgleichung für Y_t her, löse sie und beschreibe das Verhalten der erhaltenen Lösungsfolge.

68. Man löse die vorhergehende Aufgabe unter der Voraussetzung, dass die Modellgleichung (1) durch die Gleichung

$$(1') S_t = sY_{t-1} \text{ für } t = 1, 2, \dots$$

ersetzt wird, d.h. für den Fall, dass die Sparrelation eine Zeitverzögerung aufweist. Man vergleiche die erhaltenen Lösungen Y_t aus beiden Modellen für $s = 0,3$ und $g = 0,5$.

69. Man bestimme die Lösung der Differenzgleichung $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ (für $n \geq 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

70. Die Anzahl N_t der Individuen in der t -ten Generation einer Population genüge der Gleichung

$$N_{t+1} = \left(1 + r \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) N_t \text{ für } t = 0, 1, 2, \dots$$

($r > 0$ Wachstumsrate bei kleiner Populationsgröße, $K > 0$ Umweltkapazität). Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände und überprüfe sie auf Stabilität.

71. Man finde alle Lösungen der Differenzgleichung

$$(a) 2x_{n+1} - 3x_n + 1 = 0 \text{ (} n \geq 0 \text{), (b) } x_{n+1} - x_n + 7 = 0 \text{ (} n \geq 0 \text{).}$$

72. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzgleichung $x_{n+1} = (2/3)x_n + 1$ (für $n \geq 0$) und die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung $x_0 = 6$ genügt.

73. Man bestimme alle Lösungen der homogenen Differenzgleichung $x_{n+1} = 3^{2n} x_n$ ($n \geq 0$).

74. Man finde die Lösung der Differenzgleichung

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mit $x_0 \neq -1, -1/2, -1/3, \dots$. (Hinweis: Man benütze die Transformation $x_n = 1/y_n$.)

75. Gegeben sei die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 36 \quad (n \geq 0).$$

(a) Man bestätige, dass $x_n^{[h]} = C_1(1/2)^n + C_2(-7/2)^n$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist.

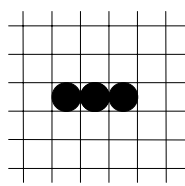
(b) Man finde eine konstante partikuläre Lösung $x_n^{[p]}$ der inhomogenen Gleichung.

(c) Wie lautet damit die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzengleichung, und wie lautet jene Lösung, die durch die Anfangswerte $x_0 = 6$ und $x_1 = 3$ bestimmt ist?

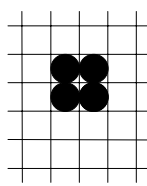
76. Gegeben sei ein zellulärer Automat in der Ebene mit zwei Zuständen 0 und 1 und der folgenden Überföhrungsfunktion: Alle 1-Elemente werden zu 0-Elementen und alle 0-Elemente, welche d2-Nachbarn von 1-Elementen sind, werden zu 1-Elementen. Man überlege sich, dass durch diese Regel mit fortschreitender Zeit ringförmig ausbreitende Muster generiert werden.

Die Aufgaben 77. bis 79. beziehen sich auf Conway's „Spiel des Lebens“ zur Simulation von Aufstieg, Veränderung und Untergang einer Gruppe lebender Organismen als diskretes dynamisches System (siehe Vorlesung sowie MLS-Internet).

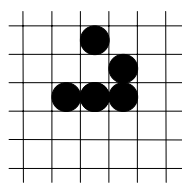
77. Man untersuche das Verhalten folgender Ausgangskonfigurationen:



Blinker,



Block,



Gleiter

78. Man finde – unter Verwendung eines geeigneten Simulationsprogramms (z.B. LIFE32 im MLS-Internet) – mindestens drei Beispiele für stabile Konstellationen.

79. Welche Ausgangsmuster sterben vollständig aus, welche werden stabil oder oszillieren? Gibt es Ausgangsmuster, für welche die Bevölkerung ins Grenzenlose anwächst?

80. Man gebe die Bilanzgleichungen für die Zustandsgrößen z_1, z_2, z_3, z_4 sowie die Gleichungen für die Ausgangsgrößen y_1, y_2 im dynamischen Netzwerk für die Wasserspeicherung (siehe Vorlesung sowie MLS-Internet) in vektorieller Form

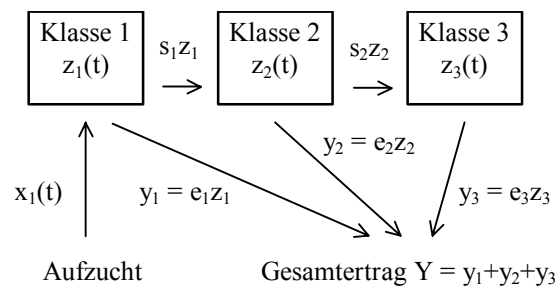
$$\vec{z}'(t) = A\vec{z}(t) + B\vec{x}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{y}(t) = C\vec{z}(t)$$

an.

81. Zur wirtschaftlichen Nutzung eines Fischbestandes als natürliche Ressource betrachte man folgendes dynamische System: Die Fischpopulation werde in drei Größenklassen eingeteilt und der Bestand innerhalb jeder Klasse durch die Zustandsgrößen $z_1(t), z_2(t)$ und $z_3(t)$ beschrieben. Die Übergänge von einer Klasse in die nächste durch natürliches Wachstum seien gemäß s_1z_1 bzw. s_2z_2 (mit den relativen Wachstumsraten s_1 und s_2) gegeben. Der Bestand werde in jeder Größenklasse durch $y_i(t) = e_i z_i(t)$ (mit den relativen Fangraten $e_i, i = 1, 2, 3$) abgefischt und zugleich durch Aussetzung neuer Fische im Ausmaß $x_1(t)$ in der ersten Klasse ergänzt (siehe Abbildung).

Man stelle die Bilanzgleichungen als Differentialgleichungen für die Bestandsgrößen (Zustandsgrößen) $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ und die Gleichungen für die Erträge (Ausgangsgrößen)

$y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ sowie für den Gesamtertrag $Y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ auf gebe alle Gleichungen in vektorieller Form an.



82. Man löse die homogene lineare Differentialgleichung $y' - y \tan x = 0$.
83. Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.
84. In dem nachstehenden Wachstumsmodell von Domar bezeichne $Y(t)$ das Volkseinkommen, $P(t)$ die Produktionskapazität und $I(t)$ die Investitionen zur Zeit t . Es gelte

$$(1) Y'(t) = \frac{1}{s} I'(t), \quad (2) P'(t) = \rho I(t) \quad (s, \rho > 0).$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $Y(t) = P(t)$ leite man eine Differentialgleichung für $I(t)$ her und bestimme deren Lösung.

85. Wir betrachten einen Elementarmarkt für ein bestimmtes Gut und nehmen an, dass das Angebot $A(t)$ und die Nachfrage $N(t)$ nach diesem Gut ausschließlich durch dessen Marktpreis $p(t)$ bestimmt werden. Dieser möge – als Funktion der Zeit t – im Fall eines Gleichgewichts zwischen Angebot und Nachfrage unverändert bleiben, andernfalls ändere er sich proportional zum jeweiligen (positiven oder negativen) Nachfrageüberschuss, d.h.

$$p'(t) = \gamma(N(t) - A(t)) \text{ mit } \gamma > 0.$$

Man bestimme den Marktpreis $p(t)$ und untersuche sein Verhalten für den Fall, dass Angebot und Nachfrage lineare Funktionen des Preises sind, d.h. $A(t) = a + bp(t)$, $N(t) = a_1 + b_1p(t)$ mit $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $b, b_1 \neq 0$ und $b \neq b_1$.