IV. Aussagen- und Prädikatenlogik

86. Man zeige, dass in einer Booleschen Algebra $(B,\cup,\cap,{}',0,1)$ für alle Elemente $x,y\in B$ gilt:

    (a) $x\cup y=1$ und $x\cap y=0 \;\Rightarrow\; x=y'$
    (b) $(x\cup y)'=x'\cap y'$, $(x\cap y)'=x'\cup y'$ (De Morgansche Gesetze)

87. Man gebe alle Funktionen $f(x_1,x_2)\in F_2(W)$

    (a) in der disjunktiven Normalform (im algebraischen Sinn) an,
    (b) in einer Form an, sodass möglichst wenige Operationen $\cup,\cap,{}'$ auftreten.

88. Man finde eine Formel F, die die zwei atomaren Formeln X_1, X_2 enthält und die Eigenschaft hat, dass bei jeder Belegung von X_1, X_2 mit Wahrheitswerten a_1, $a_2 \in \{0,1\}$ die Änderung genau eines Wertes a_1, a_2 auch den Wert von F ändert.

89. Man überprüfe, ob die folgenden Formeln Hornformeln sind und stelle sie gegebenenfalls durch Konjunktionen von Implikationen dar:

    (a) $(\neg X_1\vee X_2\vee\neg X_3)\wedge(\neg X_1\vee\neg X_2)\wedge(X_1\vee\neg X_3)$
    (b) $(\neg X_1\vee\neg X_2)\wedge(X_1\vee X_2)$
    (c) $X_1\wedge\neg X_3\wedge(\neg X_1\vee\neg X_2\vee X_3)$

90. – 93. Der folgende Markierungsalgorithmus stellt einen Erfüllbarkeitstest für Hornformeln dar:

Eingabe: eine Hornformel F
Algorithmus:

1. Versehe jedes Vorkommen einer atomaren Formel A in F mit einer Markierung, falls es in F eine Teilformel der Form $(1\to A)$ gibt;
2. **while** es gibt in F eine Teilformel G der Form $((A_1\wedge\ldots\wedge A_n)\to B)$ oder $((A_1\wedge\ldots\wedge A_n)\to 0)$, $n\geq 1$, wobei $A_1,\ldots,A_n$ bereits markiert sind und B noch nicht markiert ist **do**
   if G hat die erste Form **then**
   markiere jedes Vorkommen von B
   else gib „unerfüllbar“ aus und stoppe;
3. Gib „erfüllbar“ aus und stoppe.

90. Man wende den Markierungsalgorithmus auf die Formel

$$F=(\neg A\vee\neg B\vee\neg D)\wedge\neg E\wedge(\neg C\vee A)\wedge C\wedge B\wedge(\neg G\vee D)\wedge G$$

an.

91. Man zeige, dass die Formel

$$F=A\wedge(\neg B\vee\neg C\vee D)\wedge(\neg A\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg D)\wedge(\neg A\vee\neg C\vee E)\wedge\neg B$$

erfüllbar ist und gebe ein Modell für F an.

92. Warum wird beim Markierungsalgorithmus „unerfüllbar" ausgegeben, wenn eine Teilformel der Form $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to 0)$ vorliegt und $A_1, \ldots, A_n$ bereits markiert sind?

93. Wie kann man mit Hilfe eines Erfüllbarkeitstests einen Gültigkeitstest konstruieren?

94. Seien $F_1, \ldots, F_k$ und G aussagenlogische Formeln. Man zeige die Äquivalenz folgender Bedingungen:

    (a) $F_1, \ldots, F_k \Rightarrow G$
    (b) $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_k) \to G$ ist eine Tautologie
    (c) $F_1 \wedge \ldots \wedge F_k \wedge \neg G$ ist unerfüllbar

95. Man bestimme für folgende Klauselmenge F_K die Mengen $\mathrm{Res}^n(F_K)$ $(n = 0,1,2)$:

$$F_K = \{\{A, \neg B, C\}, \{B, C\}, \{\neg A, C\}, \{\neg C\}\}$$

96. Man zeige mit der Resolutionsmethode, dass $A \wedge B \wedge C$ eine Folgerung aus der Klauselmenge

$$F_K = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A, \neg C\}, \{A, B, C\}\}$$

ist. (Hinweis: $A \wedge B \wedge C$ folgt aus F_K genau dann, wenn $F_K \cup \{\neg A, \neg B, \neg C\}$ unerfüllbar ist.)

97. Man zeige mit der Resolutionsmethode, dass

$$F = (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B$$

eine Tautologie ist.

98. Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die Formel

$$\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x)) \text{ ?}$$

    (a) Grundmenge $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen), $P = \{(m, n) \mid m < n\}$
    (b) Grundmenge $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen), $P = \{(m, n) \mid n = m + 1\}$

99. Man bestätige durch die Angabe von Gegenbeispielen:

    (a) $(\forall x\, F \vee \forall x\, G) \not\equiv \forall x\, (F \vee G)$

    (b) $(\exists x\, F \wedge \exists x\, G) \not\equiv \exists x\, (F \wedge G)$

100. Man formuliere das ε, δ – Kriterium für die Stetigkeit einer reellen Funktion f an der Stelle x_0 („für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle x mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$") als prädikatenlogische Formel. Weiters bilde man die Negation dieser Formel, forme diese äquivalent so um, dass die Negation nicht mehr auf Quantoren sondern nur mehr auf Prädikate angewandt wird und fasse die erhaltene Formel wieder in Worte. (Hinweis: Man verwende in der Formel das einstellige Prädikat $P = \{x \mid x > 0\}$ und das dreistellige Prädikat $Q = \{(x, y, z) \mid |x - y| < z\}$ und beachte $\neg \forall x\, F \equiv \exists x \neg F$, $\neg \exists x\, F \equiv \forall x \neg F$, $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$.)