AlgoDat — Ausarbeitung zum Übungsblatt 1

Klaffenböck Patrick

Montag, 18. März 2002

VERSION 1.6

Danke an PLINIUSSECUNDUS für den Hinweis auf einen Fehler bei den Aufgaben 1 und 2.

Ebenso an LORDOFTHEBITE für den Hinweis, dass auf dem Übungsblatt ein anderer Algorithmus für Selection-Sort ist als im Skriptum (wurde leider erst sehr spät ausgebessert).

CALIDA wies bei Aufgabe 9 darauf hin, dass nicht $c \geq 1$ sondern $c \leq 35$ stehen sollte.

Vor allem die beiden ersten Beispiele wurden in der Übungseinheit zwar etwas anders gerechnet, kamen aber auf die gleiche Lösung. Übrigens zählte die Tutorin der Übung eine Verschiebung auf sich selbst auch als eine Bewegung, genauso wie das Verschieben in die temporäre Speicherzelle. Wenn man aber verstanden hat, wie sich solche kleinen Änderungen in der endgültigen Formel auswirken und das erklären konnte war sie völlig zufrieden (auch wenn die vorgerechnete Version nur Vertauschungen und nicht jede einzelne Datenbewegung zeigte).

Das hier ist hoffentlich (zumindest inhaltlich) die letzte Version dieses Dokumentes. Es werden wahrscheinlich noch etwaige Tippfehler ausgebessert.

Der LaTeX-Source, sowie die neueste Version dieses Dokuments sind unter yrucrem.dr.ag/studium/algodat_1/uebung.html erhältlich.

Aufgabe 1

Der Input hat die Form:

$$\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, ..., N, 1, 2, ..., \frac{N}{2} - 1$$

Gesucht sind die Anzahl der Schlüsselvergleiche und -bewegungen in Θ-Notation.

Bewegungen

Für $N = 8$ erhalten wir zum Beispiel die Folge 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3. Hier sieht man, dass die zwei Hälften der Folge bereits sortiert sind, allerdings stehen die letzten $\frac{N}{2} + 1$ Elemente ganz am anfang und die ersten $\frac{N}{2} - 1$ Elemente am Ende der Folge.

Daraus ergibt sich auch gleich die Anzahl der Verschiebungen, die wir brauchen um das Feld zu sortieren: wir haben $\frac{N}{2} + 1$ Elemente die wir um jeweils $\frac{N}{2} - 1$ Stellen nach hinten verschieben müssen. Und die hinteren $\frac{N}{2} - 1$ Elemente werden in einem Rutsch an ihre endgültige Position geschoben, also kommen wir auf:

$$\left(\frac{N}{2} - 1\right)\left(\frac{N}{2} + 1\right) + \frac{N}{2} - 1 = \frac{N^2}{4} + \frac{N}{2} - 2 = \Theta(N^2)$$

Definitionssache

Wenn man sagt, dass es auch als Verschiebung gilt, wenn ein Element auf sich selbst geschrieben wird, haben wir zusätzlich noch $\frac{N}{2}$ Verschiebungen, weil: die ersten $\frac{N}{2} + 1$ Elemente stehen ja schon richtig und werden sozusagen auf die selbe position verschoben *außer* das allerserste Element $\rightarrow$ also nur $\frac{N}{2}$.

$$\frac{N^2}{4} + N - 2 = \Theta(N^2)$$

Wenn mann ganz penibel ist, kann man noch mal $N - 1$ Bewegungen dazuzählen, weil ja jedes Element (wieder ausgenommen dem Ersten) zuerst in eine temporäre Speicherstelle geschrieben wird.

$$\frac{N^2}{4} + 2N - 3 = \Theta(N^2)$$

Wie gesagt, die letzten beiden Änderungen sind definitionsbedingt und ändern sowieso nichts mehr an der Ordnung der Funktion.

Vergleiche

Nun zu den Vergleichen. Die ersten $\frac{N}{2}+1$ Elemente sind ja schon sortiert. Dafür brauchen wir also $\frac{N}{2}$ Vergleiche. Als nächstes kommt die 1. Diese gehört ganz an den Anfang, wird also mit allen Elementen davor verglichen ($\frac{N}{2}+1$). Hinter der 1 stehen jetzt noch $\frac{N}{2}-2$ Elemente, diese werden ebenfalls mit den $\frac{N}{2}+1$ Elementen *und* mit der 1 (bzw. dem Element, das direkt vor ihnen kommen muss) verglichen, also $\frac{N}{2}+2$. Das ergibt dann:

$$\frac{N}{2}+\left(\frac{N}{2}+1\right)+\left(\frac{N}{2}-2\right)\left(\frac{N}{2}+2\right)=\frac{n^2}{4}+n-3=\Theta(N^2)$$

Aufgabe 2

Wie Aufgabe 1, aber diesmal hat der Input die Form:

$$\frac{N}{2},\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}+2,\frac{N}{2}-2,...,2,N-1,1,N$$

Bewegungen

Man sieht, dass jedes zweite Element vertauscht (bzw. sogar ganz nach vorne geschoben) werden muss, bis auf eines, denn die ersten beiden Elemente stehen ja schon richtig. wir haben also $\frac{N}{2}-1$ Elemente, die wir vertauschen müssen. Weiters fällt auf, dass die Anzahl der Stellen um die ein Element nach vorne verschoben werden muss abhängig davon ist, das *wievielte* zu verschiebende Element es ist. Das heißt, das erste Element, das wir verschieben müssen, gehört um 2 Positionen nach vor. Das Zweite vier Positionen, dann sechs, usw. Also müssen wir für das i-te zu verschiebende Element die Elemente davor um um $2i$ Stellen nach rechts verschieben um für das Eine Platz zu machen. Dann brauchen wir noch eine Bewegung um das Eine an seine endgültige Position zu setzten. Das ganze wie gesagt für $\frac{N}{2}-1$ Elemente, also kommen wir auf die Formel:

$$\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}(2i+1)$$

Der Einser wird ja genau $\left(\frac{N}{2}-1\right)$-mal zur Summe gezählt, also können wir ihn auch aus der Summe herausnehmen und danach $\frac{N}{2}-1$ dazuzählen:

$$\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}(2i)+\frac{N}{2}-1$$

Den Zweier können wir aus der Summe herausheben und den Rest nach Gauss auflösen:

$$2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}(i)+\frac{N}{2}-1=2\left(1+\frac{N}{2}-1\right)\frac{\frac{N}{2}-1}{2}+\frac{N}{2}-1=\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)+\frac{N}{2}-1=$$

$$=\frac{N^2}{4}-1=\Theta(N^2)$$

Definitionssache

Wie schon beim ersten Beispiel kommen noch mal $\frac{N}{2}$ Bewegungen dazu, wenn man eine Verschiebung auf sich selbst auch als Bewegung zählt und nochmal $N-1$, wenn man sagt, dass, man die Daten ja immer erst in eine temporäre Speicherstelle verschiebt.

Vergleiche

Ich möchte hier mit einem Beispiel zeigen, dass zu dem Zeitpunkt, wenn ein Element – dass nach links verschoben werden musste – richtig eingeordnet wurde, die Anzahl der Vergleiche und Verschiebungen gleich ist.

Die Folge 3,4,2,5,1,6 entspricht der gegebenen Eingabeform. Zuerst wird 3 mit 4 verglichen, was keine Verschiebung zur Folge hat (hier zähle ich ein Kopieren auf sich selbst *nicht* als Verschiebung). Dann wird 4 mit 2 Verglichen und die 4 um eins nach rechts geschoben (2 Vergleiche, 1 Verschiebung). Danach 3 mit 2 $\rightarrow$ 3 um eins nach rechts (3 Vgl., 2 Versch.). Nun steht links vom 3er nichts mehr, also kann der 2er mit nichts mehr verglichen werden, *aber* wir haben noch eine Verschiebung, es kommt nämlich der 2er an die vorderste Stelle (3 Vgl., 3 Versch.). Wenn also der 1er an seine richtige position geschoben wurde, haben wir gleich viele Vergleiche wie Verschiebungen. Wir können also die Formel die wir für die Bewegungen erarbeitet haben auch für die Vergleiche nutzen. Hinzukommt noch ein letzter Vergleich, nämlich $N-1$ mit N, der keine Verschiebung mehr zur Folge hat. Wir kommen also auf die Formel:

$$\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}(2i+1)+1$$

Die Summe lösen wir wie oben auf und erhalten:

$$\frac{N^2}{4}=\Theta(N^2)$$

Aufgabe 3 & 4

Selection-Sort anhand dieser Folge veranschaulichen: **5, 2, 4, 6, 1, 3, 2, 6**.

Durchgang	Feld								Vergleiche	Vertauschungen
1	**5**	2	4	6	**1**	3	2	6	7	1
2	$\underline{1}$	2	4	6	5	3	2	6	6	0
3	$\underline{1}$	$\underline{2}$	**4**	6	5	3	**2**	6	5	1
4	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	**6**	5	**3**	4	6	4	1
5	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	**5**	6	**4**	6	3	1
6	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	**6**	**5**	6	2	1
7	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	6	6	1	0

Die fettgeschriebenen Zahlen werden jeweils vertauscht. Bereits am Beginn des jeweiligen Durchgangs sind die unterstrichenen Zahlen schon an ihren endgültigen Positionen.

Aufgabe 5

Allgemeine Formel für die Anzahl der Schlüsselvergleiche bei Selection-Sort mit einer Folge der Länge n.

$$\frac{n^2 - n}{2} = \Theta(n^2)$$

Die Formel erkläre ich nur kurz. Bei Selection-Sort wird jedes Element mit jedem anderen Element verglichen. Das würde n^2 ergeben. Aber kein Element wird mit sich selbst verglichen, also: $n^2 - n$. Und schließlich, wenn Element a schon mit Element b verglichen wurde, wird natürlich nicht noch einmal b mit a verglichen. Damit kommen wir auf obige Formel.

Aufgabe 6

Allgemeine Formel für die Anzahl der Datenbewegungen bei Selection-Sort mit einer Folge der Länge n.

Der Algorithus durchläuft das Feld genau $(n-1)$-mal, wobei jedes Mal das kleinste Element des unsortierten Bereichs an dessen Anfang getauscht wird. Der Algorithmus, der auf dem Übungsblatt angegeben ist, führt auf jeden Fall eine Vertauschung durch (auch wenn das Element nur auf sich selbst geschrieben wird), das bedeutet, es sind immer gleich viele Vertauschungen notwendig (best-, average- und worst-case sind gleich). Des Weiteren braucht man für jede Vertauschung drei Datenbewegungen (temp = x; x = y; y = temp). Damit kommen wir auf die Formel:

$$B_{best} = B_{average} = B_{worst} = 3n - 3$$

Aufgabe 7

Wie bereits gesagt, sind die Anzahl der Vergleiche und Datenbewegungen immer gleich. Id est Best-case Average-case und Worst-case haben keinen Unterschied.

Aufgabe 8

Zeigen oder widerlegen Sie $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$.
Angenommen $f(n) = n$ und $g(n) = n^2$:

$$n = O(n^2) \text{ Aber } n^2 \neq O(n)$$

Aufgabe 9

Zeigen oder widerlegen Sie $34n^4 + 5n^2 - 4 = \Omega(n^3)$.

$$cn^3 \leq 34n^4 + 5n^2 - 4| : n^3$$
$$c \leq 34n + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^3}$$

Dies ist gegeben für $c \leq 35$ und $n_0 \geq 1$ (c und n_0 müssen trotzdem > 0 sein).

Aufgabe 10

Zeigen oder widerlegen Sie $3^n = \Theta(2^n)$.

$$c_1 2^n \leq 3^n \leq c_2 2^n| : n^2$$
$${}_1 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq c_2$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^n$ divergiert, also kann man kein c_2 finden, das größer oder gleich wäre.