9. ZEITREIHEN

Zeitabhängige Daten $y_1, y_2, \cdots, y_n$

$y_t \; ; \; t = 1, 2, 3, \cdots, n$

<u>Beispiel</u>: Börsenindizes, $t \hat{=}$ Tage

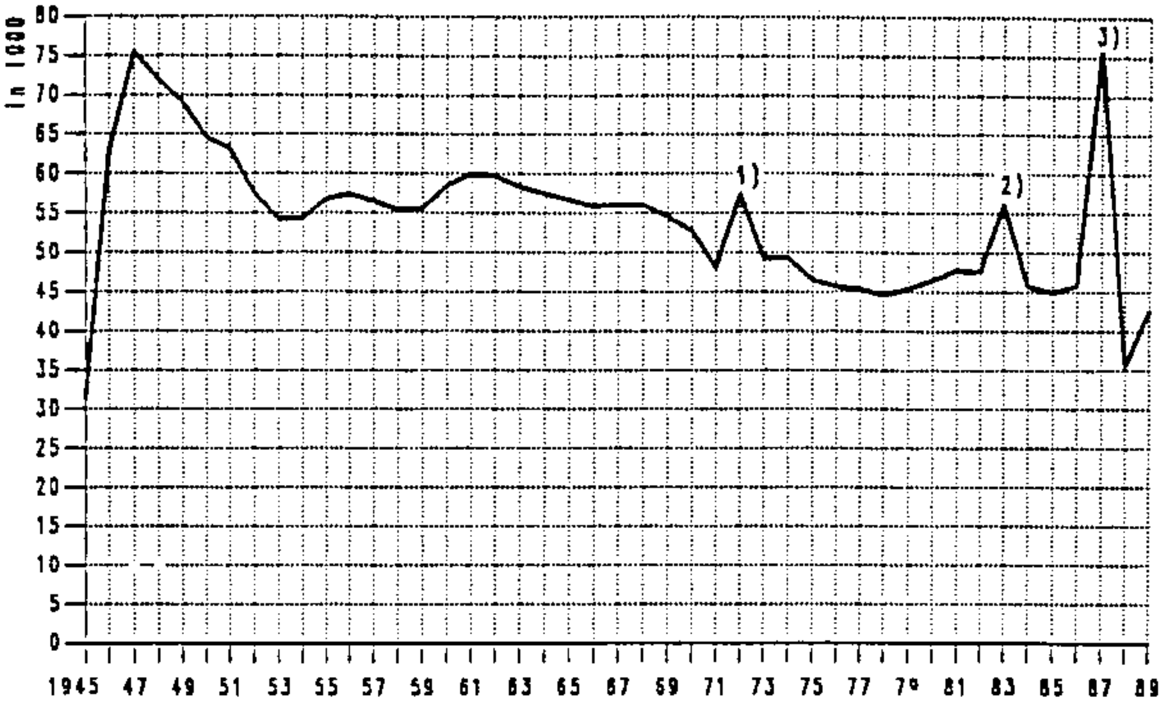
9.1 Komponenten von Zeitreihen

$$y_t = g_t + s_t + r_t$$

g_t ... Trend, glatte Komponente
s_t ... Saisonkomponente
r_t ... Restkomponente (stoch. var.)

Grafik 13

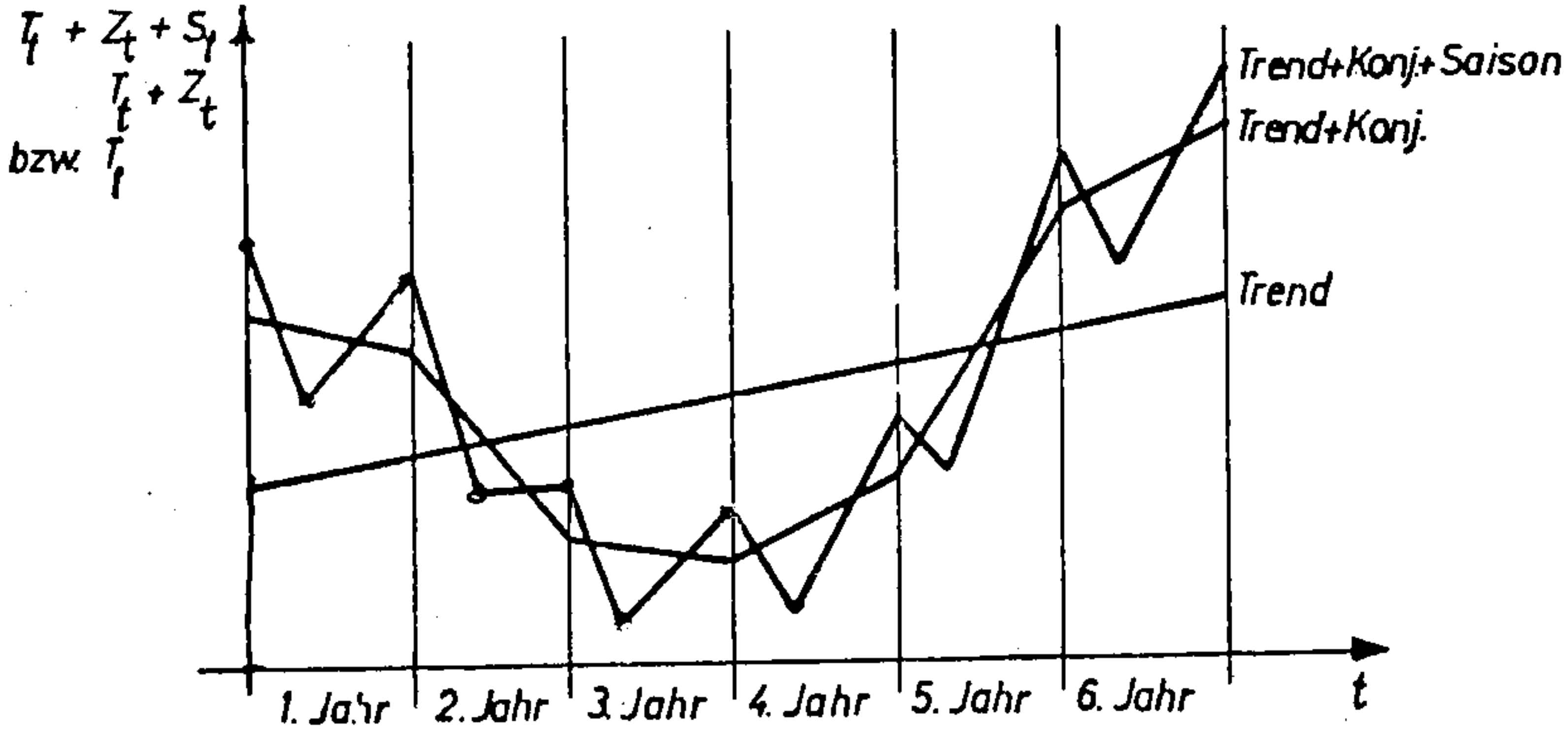
Eheschließungen 1945 - 1989



1) Einführung der Heiratsbeihilfe für Erstvermählte mit 1.1.1972 (Umwandlung der vormaligen Steuererleichterung bei Hausstandsgründung).
2) Wegfall der steuerlichen Absetzmöglichkeit der Mitgift und Gerüchte über die Abschaffung der Heiratsbeihilfe mit 1.1.1984 (tatsächlich wurde die Heiratsbeihilfe unverändert beibehalten).
3) Endgültige Abschaffung der Heiratsbeihilfe mit 1.1.1986.

ÖSIZ

Überlagerung des Trends durch konjunkturelle und saisonale Schwankungen



Beispiele für Trendfunktionen:

$g_t = g(t) = a + b \cdot t$, linearer Trend

$g_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$, quadratischer Trend

$g_t = a \cdot e^{b \cdot t}$, exponentieller Trend

Allgemeiner $g_t = \psi(t; a, b, \dots)$, Parameter $a, b, \dots$

Anpassung an die Daten

9.2 Methode der kleinsten Abstandsquadratsumme

$$\sum_{t=1}^{n} [y_t - g_t]^2 \longrightarrow \text{minimal}$$

.2

9.3 Methode der gleitenden Mittelwerte

Benachbarte ZR-Werte gemittelt

Ordnung der g.M.: Anzahl der einbez. Werte

Ungerade Ordnung: $2k+1$

$$\hat{g}_t := \frac{1}{2k+1} \sum_{j=t-k}^{t+k} y_j$$

Gerade Ordnung: $2k$

$$\hat{g}_t := \frac{1}{2k} \left[\sum_{j=t-k+1}^{t+k-1} y_j + \frac{1}{2}\left(y_{t-k} + y_{t+k}\right) \right]$$

Bem.: Mit GMW erhält man keine Werte $\hat{g}_t$ für die ersten k Beobachtungen und ebenso für die letzten k Beobachtungen

Beispiel: Beilagen

Zeitreihe

$$y_t = g_t + r_t$$

$y_1 = 2$

$y_2 = 6$

$y_3 = 1$

$y_4 = 5$

$y_5 = 3$

$y_6 = 7$

$y_7 = 2$

Gleitende Mittelwerte der Ordnung 3 $\left(k = 1, \; 3 = 2k+1 \right)$

$$\hat{g}_2 = \frac{2+6+1}{3} = 3$$

$$\hat{g}_3 = \frac{6+1+5}{3} = 4$$

$$\hat{g}_4 = \frac{1+5+3}{3} = 3$$

$$\hat{g}_5 = \frac{5+3+7}{3} = 5$$

$$\hat{g}_6 = \frac{3+7+2}{3} = 4$$

Gleitende Mittelwerte der Ordnung 4

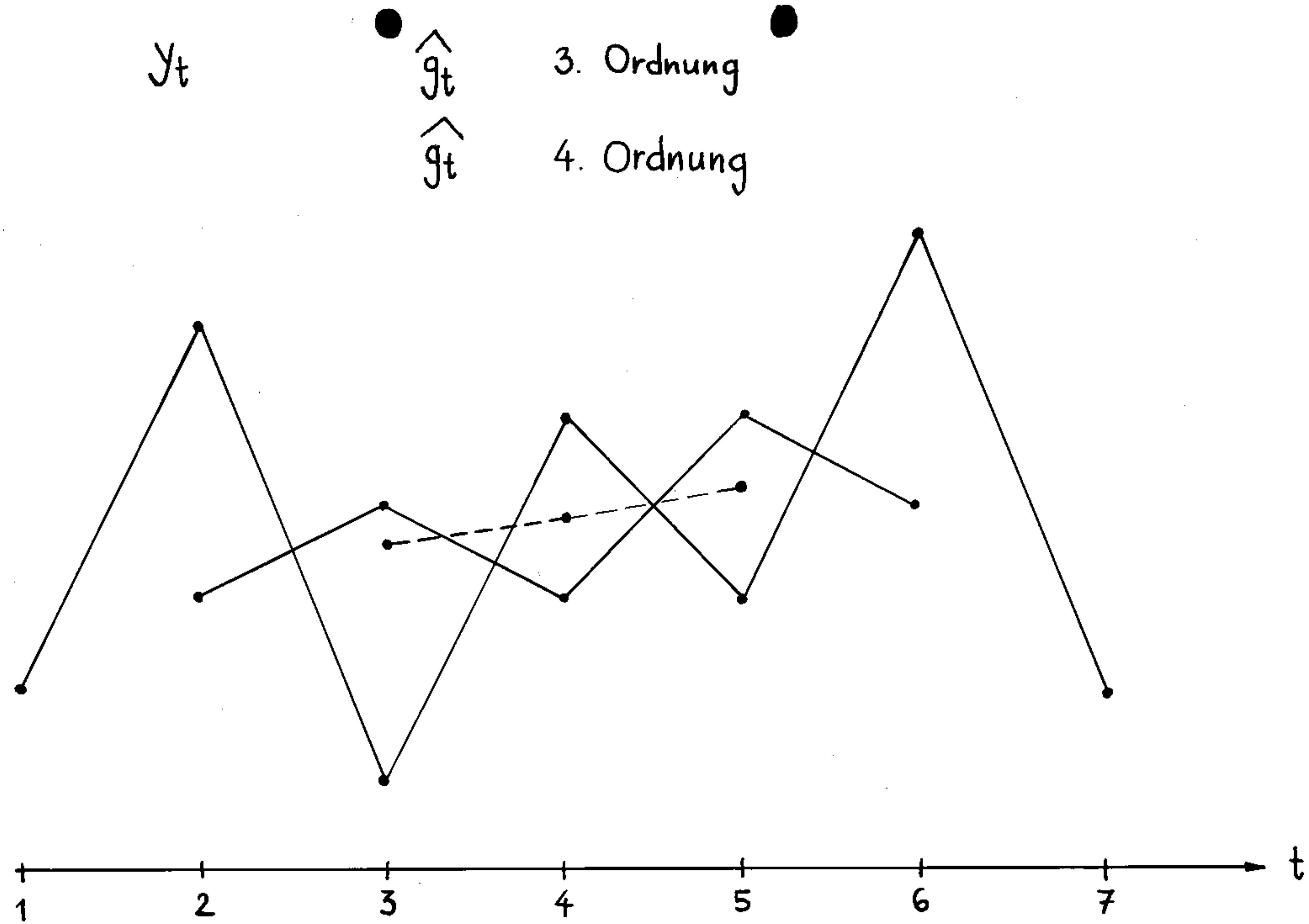
$$\hat{g}_3 = \frac{1}{4}\left[y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}(y_1 + y_5)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 6 + 1 + 5 + \frac{3}{2}\right] = \frac{29}{8} = 3{,}625$$

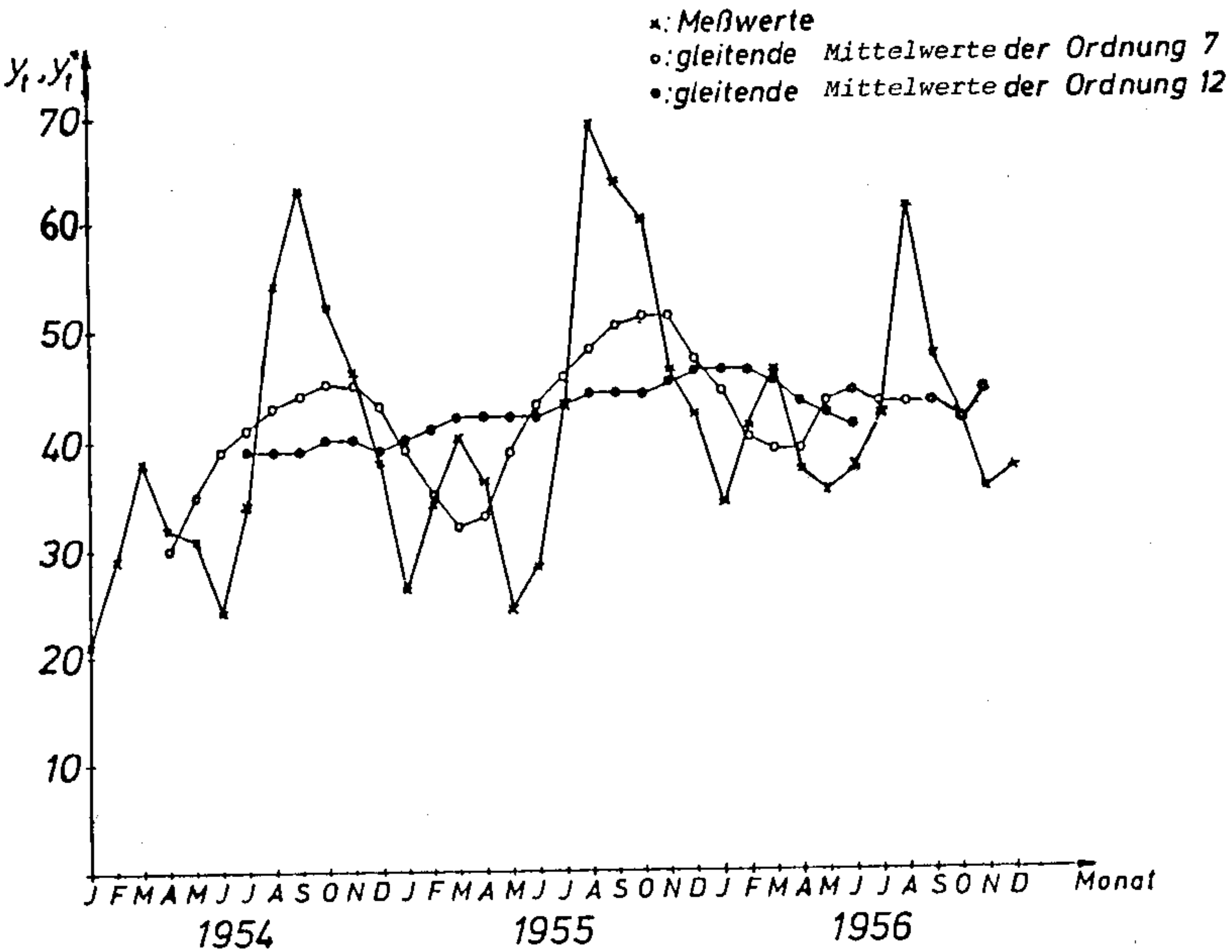
$$\hat{g}_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{6}{2} + 1 + 5 + 3 + \frac{7}{2}\right] = \frac{31}{8} = 3{,}875$$

$$\hat{g}_5 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + 5 + 3 + 7 + \frac{2}{2}\right] = \frac{33}{8} = 4{,}125$$



y_t
$\hat{g}_t$ 3. Ordnung
$\hat{g}_t$ 4. Ordnung
1
2
3
4
5
6
7
t

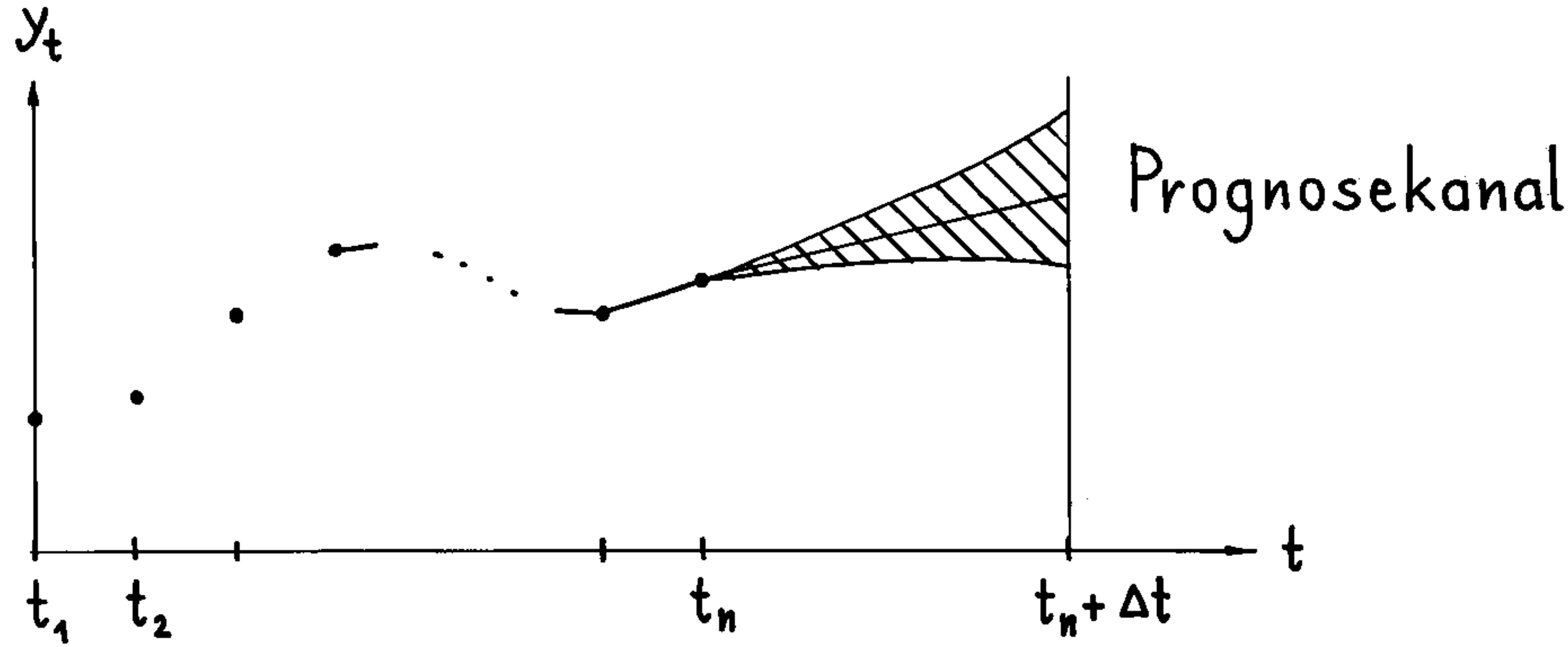
Fig. *Monatliche Anlandungen y_t der deutschen Hochseefischerei sowie gleitende* Mittelwerte y_t^* *der Ordnung 7 bzw. 12*



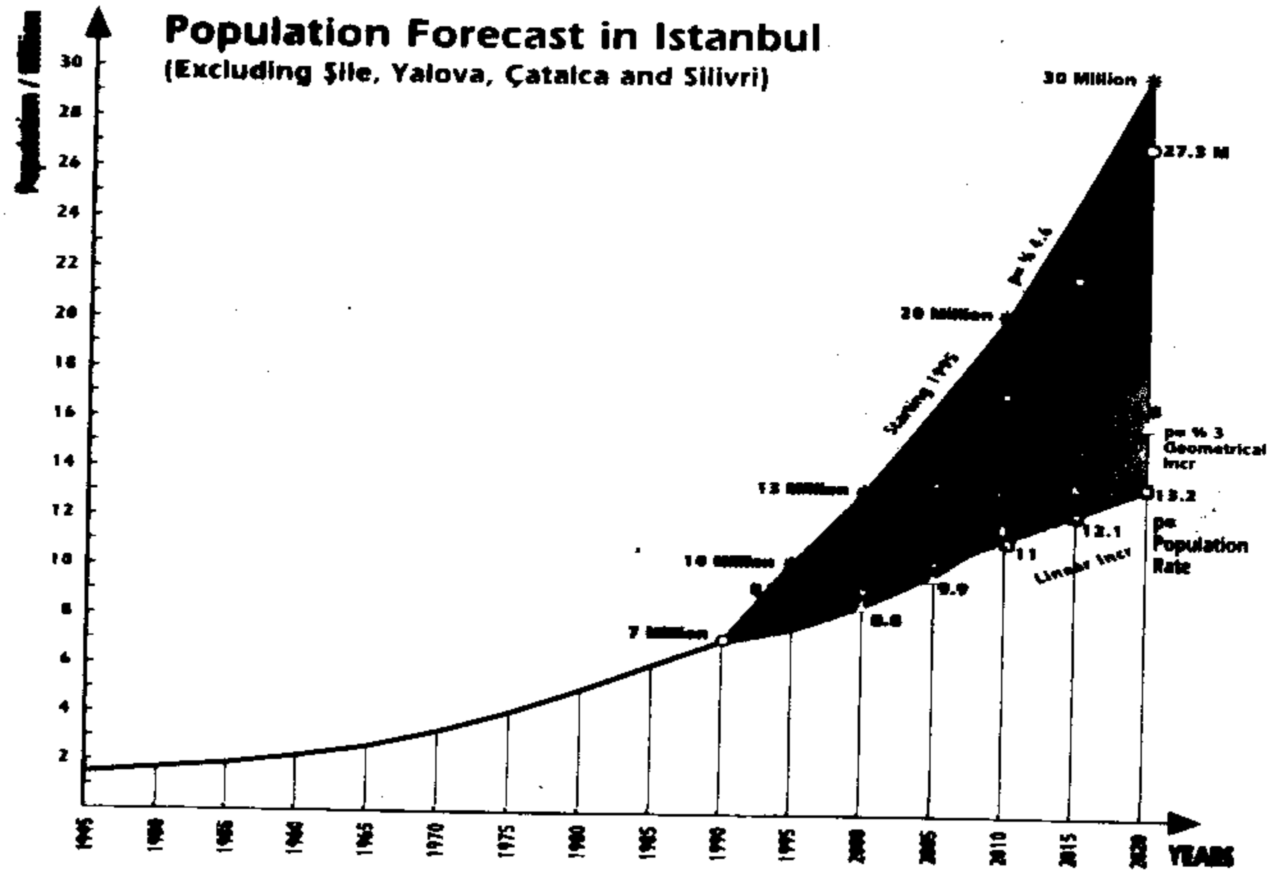
9.4 Prognosen für Zeitreihen

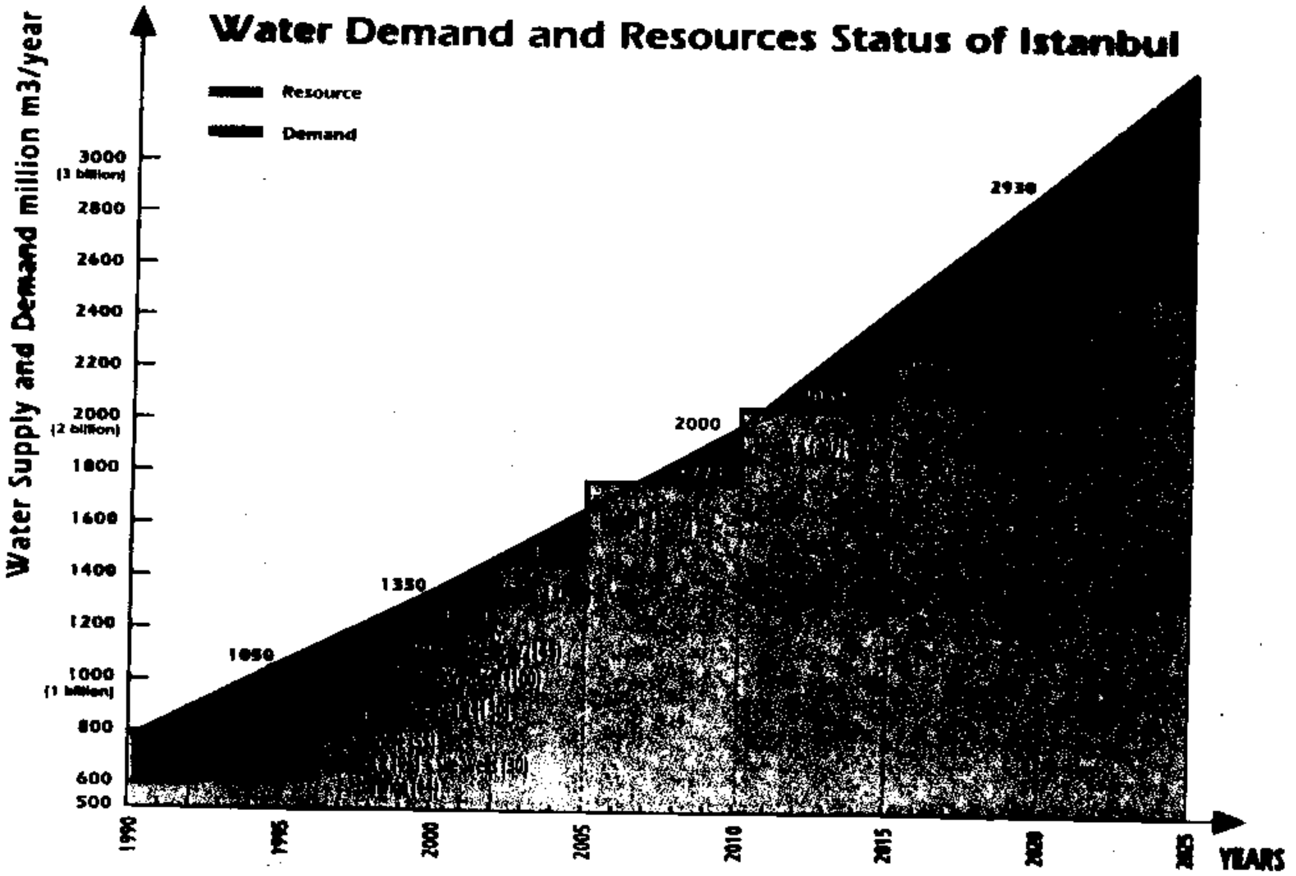
Beob. einer ZR bis t_n

<u>Gesucht</u>: Aussage über $y_{t_n+\Delta t}$ (Prognose)



<u>Bem.</u>: <u>Wahrscheinlichkeitsrechnung</u>, SM


Population Forecast in Istanbul
(Excluding Şile, Yalova, Çatalca and Silivri)
Population / Million
30 Million
27.3 M
20 Million
13 Million
10 Million
7 Million
Starting 1995
13.2
12.1
11
9.9
8.8
Linear Incr
Population Rate
Geometrical Incr
YEARS
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005
2010
2015
2020


Water Demand and Resources Status of Istanbul
Resource
Demand
Water Supply and Demand million m3/year
3000
(3 billion)
2800
2600
2400
2200
2000
(2 billion)
1800
1600
1400
1200
1000
(1 billion)
800
600
500
2930
2000
1350
1050
YEARS
1990
1995
2000
2005
2010
2015
2020