III

STATISTISCHE EXPERIMENTE UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Def.: Ein statistisches Experiment ist eine wiederholbare Handlung mit mehr oder weniger ungewissem Ausgang.

Die beobachtete Größe wird Merkmal genannt, und die Menge aller möglichen Versuchsausgänge heißt Merkmalraum.

Der Versuchsausgang eines statistischen Experiments ist nicht deterministisch berechenbar.

Man nennt Größen, die nicht voraus berechenbar sind Stochastische Größen.

στοχαστικος = jemand, der im Vermuten geschickt ist

10. STOCHASTISCHE GRÖSZEN UND WAHRSCHEINLICHKEITEN

<u>Beispiele</u>: B1: Anzahl der schlechten Stücke in einer Stichprobe

B2: Lebensdauer eines technischen Systems

B3: Arbeitszeit für ein großes Werk

B4: Bremsweg

<u>Bem.</u>: Stochastische Größen $X, Y, Z, T, \ldots$
Werte die sie annehmen $x, y, z, t, \ldots$

Merkmalräume zu SG_n können endlich, abzählbar unendlich oder kontinuierlich sein

<u>Beispiele</u>:

B1: n Stücke geprüft, $M = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

B2: $M = [0, \infty)$

B3: $M = [0, a]$, a obere Grenze

B4: $M = [0, a]$, a maximaler Bremsweg

<u>Wahrscheinlichkeiten</u> sind Zahlen die den <u>Grad des Vertrauens</u> in bestimmte Klassen von Versuchsausgängen angeben

B1: X = Anzahl schlechter Stücke in einer SP vom Umfang 7

gesucht: $W\{X=2\}$ oder $W\{X \leq 3\}$

B2: X = Lebensdauer

gesucht: $W\{X > 2000\,h\}$

B3: X = Arbeitszeit

gesucht: $W\{X \leq 10\,h\}$

B4: X = Bremsweg

gesucht: $W\{c_1 \leq X \leq c_2\}$

Bem.: Wahrscheinlichkeiten von Teilmengen der Merkmalräume. Solche Teilmengen eines Merkmalraumes heißen Ereignisse.

Def.: Ein System $\mathcal{E}$ von Teilmengen in einem Merkmalraum M heißt Ereignisfeld, wenn folgendes gilt:

(1) $M \in \mathcal{E}$

(2) falls $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$

(3) für jede Folge $A_1, A_2, \dots$ mit $A_n \in \mathcal{E}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

Aus den Eigenschaften (1) bis (3) folgen:

(4) $A_1, \dots, A_n$ mit $A_j \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{E}$

$$\Rightarrow \bigcap_{j=}^{n} A_j \in \mathcal{E}$$

(5) für jede Folge von Ereignissen $A_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$

Beweis: (4) Ergänzung zu einer Folge mittels $\emptyset$

(5) Morgan'sche Regeln: $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

10.1 Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Endlicher Merkmalraum $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$
alle $\{a_i\}$, genannt Elementarereignisse, sind gleich „wahrscheinlich", so definiert man die Wahrsch. $W(A)$ eines Ereignisses $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_g}\}$ mit g Elementen, $g \leq m$, durch

$$W(A) := \frac{g}{m}$$

<u>Anwendung</u>: Lotterie, Stichproben,

B1: Wie groß ist die W., dass in der SP vom Umfang n genau a schlechte Stücke sind?

Lösung: Falls <u>kein</u> Zurücklegen, gibt es genau $\binom{N}{n} = m$ Auswahlen von n Stücken aus den insgesamt N Stücken (Kombinationen ohne Wiederholung)

Es gibt genau $\binom{A}{a}$ Auswahlen von a schlechten aus den insgesamt A schlechten Stücken.

Wegen $a \leq n$ gibt es genau $\binom{N-A}{n-a}$ Auswahlen von den restlichen guten Stücken.

$\Rightarrow$ die Anzahl g derjenigen Auswahlen, die genau a schlechte Stücke enthalten ist

$$\binom{A}{a}\binom{N-A}{n-a} = g$$

Anwendung der klassischen W.-Def. ergibt die W. des Ereignisses E: „genau a schlechte Stücke in der SP":

$$W(E) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{A}{a}\binom{N-A}{n-a}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{für} \quad a = a_1(1)a_2$$

wobei $\quad a_1 = \max\{0, n-(N-A)\}$

$\qquad\quad a_2 = \min\{n, A\}$

<u>Bem.</u>: X SG Anzahl schlechter Stücke in der SP

Merkmalraum $M = \{a_1, a_1+1, a_1+2, \dots, a_2\}$

10.2 Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

n-malige Wiederholung eines stat. Versuches
A festes Ereignis

<u>absolute Häufigkeit</u> von A:

$H_n(A) :=$ Anzahl jener Versuchsausgänge $x \in A$

<u>relative Häufigkeit</u> von A:

$h_n(A) := H_n(A)/n$

Für festes Ereignis A und wachsendes $n \to \infty$ konvergenzartig $h_n(A) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} p$, genannt <u>empirisches Gesetz der großen Zahlen</u>

Eigenschaften von relativen Häufigkeiten für Ereignisse $A, A_1, \dots, A_k$ eines Ereignisfeldes $\mathcal{E}$:

(a) $0 \leq h_n(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{E}$

(b) $h_n(\emptyset) = 0$ und $h_n(M) = 1$ ... Normierung

(c) für einander paarweise ausschließende Ereignisse $A_1, \dots, A_k$, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ gilt

$$h_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} h_n(A_i) \quad \text{... Additivität}$$

Begründung: Betrachte $H_n(A)$ Ü

Häufigkeitsinterpretation von Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeiten werden als idealisierte relative Häufigkeiten angesehen.

Mathem. Modell: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Def.: Eine W.-Vtlg. auf einem Ereignisfeld $\mathcal{E}$ ist eine Zuordnung, die jedem Ereignis $A \in \mathcal{E}$ eine reelle Zahl $W(A)$ zuordnet, wobei gilt:

(1) $0 \leq W(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{E}$

(2) $W(M) = 1$

(3) Für jede Folge $A_1, A_2, \dots$ von Ereignissen

$A_i \in \mathscr{E}$ die paarweise disjunkt sind, gilt

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} W(A_i)$$